

APLICACIONES DE LA DERIVADA I

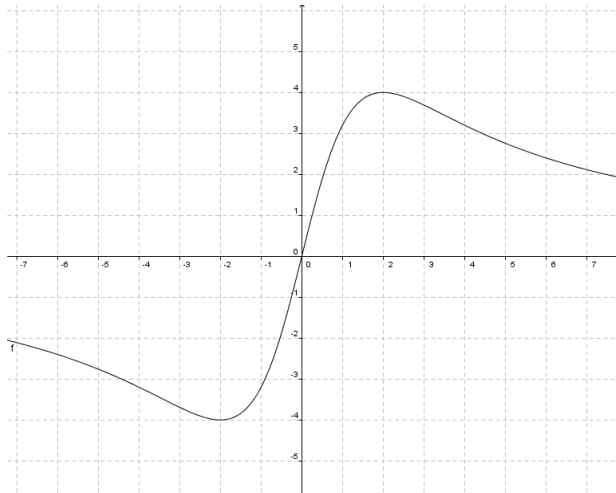


Contenidos

- Máximos y mínimos locales.
- Puntos críticos
- Monotonía y concavidad.
- Más asíntotas horizontales, verticales y oblicuas
- Trazado de curvas.
- Máximos y mínimos absolutos.
- Problemas de optimización

Ejercicios a resolver en la práctica

1. Dada la función f definida por $f(x) = \sqrt[3]{x^5 + 2}$. Determina y clasifica los puntos o valores críticos.
2. Dada la función f definida por $f(x) = \arctan(x^2)$. Indica el dominio, los puntos críticos, los intervalos en los cuales la función dada crece o decrece, indica, si existen, los valores extremos locales, estudia la concavidad de la gráfica, e indica, si existen, los puntos de inflexión.
3. Esboza la gráfica de la función f definida por $f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$
4. Sea f una función continua tal que la gráfica de la función f' es la siguiente:



- a) ¿En cuáles intervalos es la función f creciente y en cuáles es decreciente? Justifica tu respuesta.
- b) Indica, si existen, los extremos locales.
- c) ¿En cuáles intervalos la gráfica de f es cóncava hacia arriba y en cuáles es cóncava hacia abajo? Justifica tu respuesta.
- d) Indica, si existen, los puntos de inflexión.

5. Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Halla los valores de a , b , c y d para los que la función f tenga un máximo local 2 en $x = -1$, y un mínimo local -1 en $x = 1$.

6. Dada $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} + 1 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{3} & \text{si } 0 < x < 2 \\ \frac{1}{4-x^2} & \text{si } 0 < x < 2 \end{cases}$

- a) Indica el dominio el dominio de la función f
- b) Halla, si existen, las asíntotas horizontales y verticales de la gráfica de la función f .
- c) Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- d) Indica, si existen, los valores extremos locales.
- e) Determina los intervalos donde la gráfica de la función es creciente y donde es decreciente.
- f) Has un bosquejo de la gráfica.

7. Halla el máximo absoluto y el mínimo absoluto de la función f definida por $f(x) = -x\sqrt{x+1}$ en el intervalo $[-1, 3]$.

8. Una caja con base cuadrada y parte superior abierta debe tener un volumen de 32000 cm^3 . Determina las dimensiones de la caja que minimicen la cantidad de material usado.

9. a) Si $f(x) = |x|^3$, calcula $f'(x)$ y $f''(x)$ para todo número real x , y demuestra que $f^{(3)}(0)$ no existe.

b) Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f' .

c) Estudia la concavidad de la gráfica de la función de la función f' , y determina si existen puntos de inflexión.

d) Grafica las funciones f , f' y f'' y verifica los resultados obtenidos en a), b), c) y d).



Reflexiona

- ¿Qué es un punto o valor crítico?
- ¿Qué pasos debes seguir para hallar los puntos o valores críticos de una función?
- ¿Qué característica se puede deducir de una función f en el intervalo (a, b) si $f'(x) > 0$ para toda $x \in (a, b)$?
- ¿Qué característica se puede deducir de una función f en el intervalo (a, b) si $f'(x) < 0$ para toda $x \in (a, b)$?
- ¿Qué pasos debes seguir para determinar los intervalos en los cuales una función es creciente?
- ¿Qué pasos debes seguir para determinar los intervalos en los cuales una función es decreciente?
- ¿Qué es un máximo local?
- ¿Qué es un mínimo local?
- Si $x_0 \in \text{Dom}_f$ y además $f'(x) > 0$ para toda $x \in (a, x_0)$ y $f'(x) < 0$ para toda $x \in (x_0, b)$, ¿qué puedes afirmar con respecto a $f(x_0)$?
- Si $x_0 \in \text{Dom}_f$ y además $f'(x) < 0$ para toda $x \in (a, x_0)$ y $f'(x) > 0$ para toda $x \in (x_0, b)$, ¿qué puedes afirmar con respecto a $f(x_0)$?
- ¿Qué pasos debes seguir para determinar los máximos locales de una función?
- ¿Qué pasos debes seguir para determinar los mínimos locales de una función?
- ¿Qué característica se puede deducir de la gráfica de una función f en el intervalo (a, b) si $f''(x) > 0$ para toda $x \in (a, b)$?
- ¿Qué característica se puede deducir de la gráfica de una función f en el intervalo (a, b) si $f''(x) < 0$ para toda $x \in (a, b)$?
- ¿Qué pasos debes seguir para determinar los intervalos en que la gráfica de una función es cóncava hacia arriba?
- ¿Qué pasos debes seguir para determinar los intervalos en que la gráfica de una función es cóncava hacia abajo?
- ¿Qué es un punto de inflexión?
- Si $x_0 \in \text{Dom}_f$ y además $f''(x) > 0$ para toda $x \in (a, x_0)$ y $f''(x) < 0$ para toda $x \in (x_0, b)$, ¿qué puedes afirmar con respecto al punto $(x_0, f(x_0))$?
- Si $x_0 \in \text{Dom}_f$ y además $f''(x) < 0$ para toda $x \in (a, x_0)$ y $f''(x) > 0$ para toda $x \in (x_0, b)$, ¿qué puedes afirmar con respecto al punto $(x_0, f(x_0))$?
- ¿Qué pasos debes seguir para determinar los puntos de inflexión de la gráfica de una función?

Ejercicios propuestos

1. Para cada una de las funciones que se definen a continuación determina el dominio, los valores críticos, los intervalos en los cuales la función dada crece o decrece, los valores extremos locales, discute la concavidad de la gráfica, e indica, si existen, los puntos de inflexión.

a) $f(x) = x + \operatorname{sen} x$ b) $f(x) = 3 - x + \arctan(x)$

c) $f(x) = 3 - (x-2)^{\frac{4}{5}}$ d) $f(x) = 3x\sqrt{1-x^2}$

2. Para cada una de las funciones que se definen a continuación:

i) Indica el dominio.

ii) Halla, si existen, los cortes con los ejes.

iii) Determina las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales de la gráfica de f .

iv) Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

v) Determina, si existen, los valores extremos locales

vi) Estudia la concavidad.

vii) Indica, si existen, puntos de inflexión

viii) Grafica la función dada.

a) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$

b) $f(x) = 2 + x - \frac{1}{x-2}$

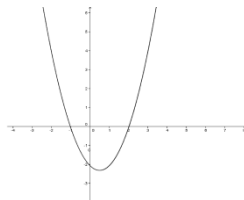
c) $f(x) = -\frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4}}$

d) $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$

e) $f(x) = \frac{2x^2 + 4x + 2}{1 + x^2}$

f) $f(x) = \frac{x+3}{9-x^2}$

3. Sea f una función continua tal que $f(-1) = 5$ y $f(2) = -4$, si la gráfica de la función f' es la siguiente:



- a) ¿En cuáles intervalos es la función f creciente y en cuáles es decreciente? Justifica tu respuesta.
b) Indica los extremos locales.



Reflexiona

- ¿Qué es el valor máximo absoluto de una función?
- ¿Qué es el valor mínimo absoluto de una función?
- ¿En cuáles puntos o valores del dominio puede alcanzar una función su máximo o mínimo absoluto?
- ¿Toda función alcanza el máximo o mínimo absoluto en algún punto de su dominio?
- ¿Qué puedes afirmar acerca de los valores extremos absolutos de una función continua definida en un intervalo cerrado y acotado?
- ¿Qué pasos debes seguir para hallar los valores extremos absolutos de una función continua en un intervalo cerrado y acotado?

4. Para cada una de las funciones que se definen a continuación: halla el máximo y mínimo absoluto de cada una de las funciones en el intervalo indicado.

- a) $g(x) = \cos 2x$ en $\left[-\pi, \frac{\pi}{4}\right]$ b) $f(x) = 4x\sqrt{1-x^2}$ en $[-1, 1]$
- c) $f(x) = \arcsen(x^2)$ en $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$ d) $g(x) = x + \frac{x+3}{x-5}$ en $[6, 8]$

5. Una empresa constructora está diseñando una zona de descanso para automovilistas al lado de una carretera principal. La zona será rectangular, tendrá 5.000 m^2 de área y estará cercada por los tres lados no adyacentes a la carretera. ¿Cuál es la menor cantidad de metros de cerca necesaria para realizar el trabajo?

6. Halla la distancia del punto $(2, 0)$ a la gráfica de la función f definida por $f(x) = \sqrt{x}$.

7. Halla las dimensiones de un rectángulo de área 64 cm^2 para que la distancia de un vértice al punto medio de uno de sus lados no adyacentes sea mínima.

8. Sea f una función definida por $f(x) = ax^3 + 2bx^2 + 9x + 1$. Halla a y b si $(2, 3)$ es un punto de inflexión de la gráfica de f .

9. Sea f una función impar de dominio $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ tal que, f es continua en su dominio, $f(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, f es decreciente en $(0, 1)$, la gráfica de f es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$. ¿Cuáles de las afirmaciones siguientes son verdaderas?

a) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$

c) La recta de ecuación $y = -1$ es una asíntota horizontal.

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$

e) La gráfica de f es cóncava hacia arriba en $(0, +\infty)$

f) f es creciente en $(1, 0)$,

Respuestas de los ejercicios propuestos

1) a) $\text{Dom}_f = \mathbb{R}$; puntos críticos: $x = (1 + 2k)\pi$ $k \in \mathbb{Z}$; f es creciente en \mathbb{R} . La gráfica es cóncava hacia abajo en los intervalos de la forma $(2k\pi, (2k+1)\pi)$ con $k \in \mathbb{Z}$ y es cóncava hacia arriba en los intervalos de la forma $((2k+1)\pi, (2k+2)\pi)$ con $k \in \mathbb{Z}$. Puntos de inflexión: $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

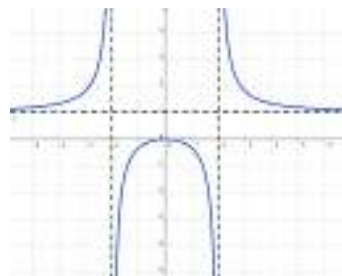
b) $\text{Dom}_f = \mathbb{R}$; punto crítico: $x = 0$; f es decreciente en \mathbb{R} ; no tiene valores extremos locales. La gráfica es cóncava hacia abajo en $(0, +\infty)$ y es cóncava hacia arriba en $(-\infty, 0)$; $(0, 3)$ es un punto de inflexión.

c) $\text{Dom}_f = \mathbb{R}$; punto crítico: $x = 2$; f es creciente en $(-\infty, 2)$ y es decreciente en $(2, +\infty)$; $f(2) = 3$ es un máximo local. La gráfica de f es cóncava hacia arriba en todo su dominio.

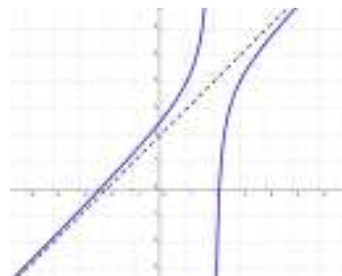
d) $\text{Dom}_f = [-1, 1]$; puntos críticos: $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ y $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$; f es decreciente en $(-1, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ y en $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$ y es creciente en $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$; $f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{3}{2}$ es un máximo local y $f(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{3}{2}$ es un mínimo local. La gráfica de f es cóncava hacia arriba en $(-1, 0)$ y cóncava hacia abajo en $(0, 1)$; $(0, 0)$ es un punto de inflexión.

2)

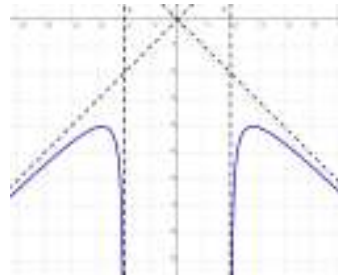
a) i) $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$ **ii)** $(0, 0)$ **iii)** Verticales: $x = -2$ y $x = 2$. Horizontal: $y = 1$ **iv)** la función es creciente en $(-\infty, -2)$ y en $(-2, 0)$ y es decreciente en $(0, 2)$ y en $(2, +\infty)$ **v)** $f(0) = 0$ es un máximo local. No tiene mínimos locales **vi)** La gráfica es cóncava hacia arriba en $(-\infty, -2)$ y en $(2, +\infty)$ y es cóncava hacia abajo en $(-2, 2)$ **vii)** La gráfica no tiene puntos de inflexión.



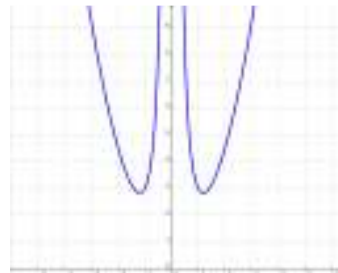
b) i) $\mathbb{R} - \{2\}$ **ii)** $(0, 4)$, $(\sqrt{5}, 0)$ y $(-\sqrt{5}, 0)$ **iii)** Vertical: $x = 2$ **iv)** Oblícuca: $y = x + 2$ **v)** La función es creciente en $(-\infty, 2)$ y en $(2, +\infty)$ **vi)** No tiene extremos locales **vii)** La gráfica es cóncava hacia arriba en $(-\infty, 2)$ y es cóncava hacia abajo en $(2, +\infty)$ **viii)**



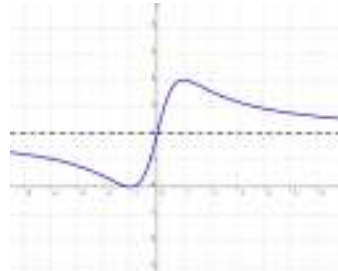
c) i) $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ ii) No interseca a los ejes coordenados iii) Verticales: $x = -2$ y $x = 2$. Oblicuas: $y = x$ y $y = -x$ iv) La función es creciente en $(-\infty, -2\sqrt{2})$ y en $(2, 2\sqrt{2})$ y es decreciente en $(-2\sqrt{2}, -2)$ y en $(2\sqrt{2}, +\infty)$ v) $f(-2\sqrt{2}) = -4$ y $f(2\sqrt{2}) = -4$ son máximos locales. No tiene mínimos locales vi) La gráfica de f es cóncava hacia abajo en $(-\infty, -2)$ y en $(2, +\infty)$ vii) La gráfica no tiene puntos de inflexión



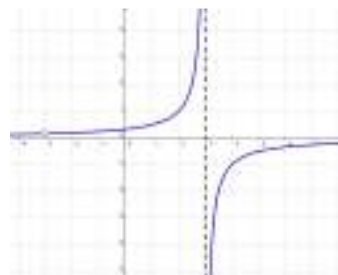
d) i) $\mathbb{R} - \{0\}$ ii) $(-\sqrt[3]{2}, 0)$ iii) Vertical: $x = 0$. Horizontales: no tiene Oblicuas: No tiene iv) La función es creciente en $(1, +\infty)$ y es decreciente $(-\infty, 0)$ y $(0, 1)$ v) $f(1) = 3$ es un mínimo local. No tiene máximos locales vi) La gráfica de f es cóncava hacia arriba en $(-\infty, -\sqrt[3]{2})$ y en $(0, +\infty)$ y cóncava hacia abajo en $(-\sqrt[3]{2}, 0)$ vii) Punto de inflexión: $(-\sqrt[3]{2}, 0)$



e) i) \mathbb{R} ii) $(0, 2)$ y $(-1, 0)$ iii) Verticales: no tiene Horizontal: $y = 2$ iv) La función es creciente en $(-1, 1)$ y es decreciente $(-\infty, -1)$ y en $(1, +\infty)$ v) $f(1) = 4$ es un máximo local y $f(-1) = 0$ es un mínimo local vi) La gráfica de f es cóncava hacia arriba en $(-\sqrt{3}, 0)$ y en $(\sqrt{3}, +\infty)$ y cóncava hacia abajo en $(-\infty, -\sqrt{3})$ y en $(0, \sqrt{3})$ vii) Puntos de inflexión: $(0, 2)$, $(-\sqrt{3}, 2 - \sqrt{3})$ y $(\sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$



f) i) $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$ ii) $(0, \frac{1}{3})$ iii) Vertical: $x = 3$. Horizontal: $y = 0$ iv) f es creciente en $(-\infty, -3)$ en $(-3, 3)$ y en $(3, +\infty)$ v) No tiene valores extremos locales vi) La gráfica de f es cóncava hacia arriba en $(-\infty, -3)$ y en $(-3, 3)$ y cóncava hacia abajo en $(3, +\infty)$ vii) No tiene puntos de inflexión



3) a) Creciente en $(-\infty, -1)$ y en $(2, +\infty)$; creciente en $(-1, 2)$ b) máximo local : $f(-1) = 5$; mínimo local: $f(2) = -4$.

4) a) Máximo absoluto $g(-\pi) = g(0) = 1$, mínimo absoluto $g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$

b) Máximo absoluto $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2$, mínimo absoluto $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2$

c) Máximo absoluto $f(-1) = \frac{\pi}{2}$, mínimo absoluto $f(0) = 0$

d) Máximo absoluto $g(6) = 15$, mínimo absoluto $g(5 + 2\sqrt{2}) = 6 + 4\sqrt{2}$

5) 200m 6) $\frac{\sqrt{7}}{2}$ 7) $x = 4$ y $y = 16$ 8) $a = 1$ y $b = -3$ 9) a) , c) y e)



Halla el error

- Como la función f es creciente en $(-1, 1)$ es decreciente en $(-\infty, -1)$ se tiene que $x = -1$ es un mínimo local.
- Como la gráfica de la función f es cóncava hacia arriba en $(-\sqrt{3}, 0)$ y es cóncava hacia abajo en $(-\infty, -\sqrt{3})$ se tiene que $-\sqrt{3}$ es un punto de inflexión.
- Sea $f(x) = \frac{1}{x-1}$ entonces como la gráfica de la función f es cóncava hacia arriba en $(1, +\infty)$ y es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 1)$ en $x = 1$ hay un punto de inflexión.
- La función seno tiene infinitos máximos y mínimos absolutos, que son $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ y $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ respectivamente.
- La gráfica de una función puede intersecar (cortar) las asíntotas verticales.
- La gráfica de una función no puede intersecar (cortar) una asíntota horizontal.
- Para resolver un problema de optimización es suficiente definir la función correspondiente y luego basta determinar los puntos o valores críticos.

Problemas Extras

Parte única:

1 Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función:

$$f(x) = (x + 2)^2$$

2 Estudia y representa la función:

$$f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$$

3 Representa gráficamente la siguiente función, estudiando previamente los aspectos que consideres más relevantes:

$$f(x) = \frac{x^2}{x + 1}$$

4 Dada la función:

$$f(x) = \frac{x^3 - 2}{x}$$

estudia sus aspectos más relevantes y represéntala gráficamente.

5 Estudia y representa la siguiente función:

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 4}$$

6 Estudia el crecimiento y el decrecimiento de la siguiente función:

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 1$$

7 Estudia y representa la función:

$$f(x) = \frac{x + 3}{x - 1}$$

8 Representa gráficamente la siguiente función, estudiando los aspectos que consideres más relevantes:

$$f(x) = \frac{x^3 + 2}{x}$$

9 Estudia y representa la función:

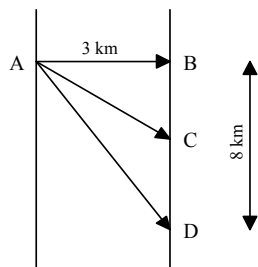
$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

10 Estudia dónde crece y dónde decrece la función:

$$f(x) = 3 + 12x - 3x^2$$

11 Resuelva los siguientes problemas:

- Encuentre dos números que sumados den 100 y cuyo producto sea máximo.
- Muestre que de todos los rectángulos con un área dada, el cuadrado es que tiene menor perímetro.
- Encuentre el área del mayor rectángulo que se pueda inscribir en un semicírculo de radio r .
- Encuentre el punto de la parábola $y = x^2$ más cercano al punto $(1, 4)$.
- Un hombre está en A, a la orilla de un río recto de 3 km de ancho, quiere llegar al punto D, 8 km más abajo en la otra orilla, lo más rápido posible. Podría remar en su bote directamente al frente (B) y correr a D, o podría remar directamente a D, o podría remar a un punto C cualquiera entre B y D y luego correr. Si el hombre puede remar a 6 km/hr y correr a 8 km/hr, ¿hasta donde debe llegar en bote para llegar a D lo más rápido posible? Asuma que la rapidez del agua es 0 km/hr.



- Un cilindro circular recto se inscribe en un cono de altura h y base de radio r .

Encuentre el volumen máximo posible de dicho cilindro.

- g) Los márgenes superior e inferior de un poster miden 6 cm y los márgenes laterales 4 cm cada uno. Si el área impresa debe ser de 384 cm^2 , encuentre las dimensiones del poster de área mínima.

12 Considera la función:

$$f(x) = 2x^3 + 9x^2 + 12x + 1$$

- a) Estudia su crecimiento y halla sus máximos y mínimos.
b) Estudia su curvatura y obtén sus puntos de inflexión.

13 Halla los máximos, mínimos y puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = (x-2)^2(x+1)$$

Di dónde es creciente, decreciente, cóncava y convexa.

14 Un heladero ha comprobado que, a un precio de 50 céntimos de euro la unidad, vende una media de 200 helados diarios. Por cada céntimo que aumenta el precio, vende dos helados menos al día. Si el coste por unidad es de 40 céntimos, ¿a qué precio de venta es máximo el beneficio diario que obtiene el heladero? ¿Cual será ese beneficio?

15 Halla los intervalos de crecimiento y los máximos y mínimos de la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$$

16 Estudia el crecimiento y la curvatura de la siguiente función. Halla sus máximos, mínimos y puntos de inflexión:

$$f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{9} - x^2 + 1$$

17 Una huerta tiene actualmente 24 árboles, que producen 600 frutos cada uno. Se calcula que, por cada árbol adicional plantado, la producción de cada árbol disminuye en 15 frutos. ¿Cuál debe ser el número total de árboles que debe tener la huerta para que la producción sea máxima? ¿Cuál será esa producción?

18 Estudia los intervalos de crecimiento y los máximos y mínimos de la función:

$$f(x) = \frac{4x - 12}{(x - 2)^2}$$

19 Un depósito abierto de latón con base cuadrada y capacidad para 4 000 litros, ¿qué dimensiones debe tener para que su fabricación sea lo más económica posible?

Practica elaborada por la Prof:

Aida Montezuma.

Ampliada por Prof

Antonio Di Teodoro. 2010. (Basada en prácticas anteriores de la USB-Matemáticas), en Especial las prácticas de la Profa **Diasparra Maikol.**

Formato doc->Pdf